

Exercice 1 [3 points]

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x} + 4e^x - 5 = 0$.

Exercice 2 [1 point]

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{3x-1} \times e^{-x+5} \leq e^2$.

Exercice 3 [4 points]

Pour tout réel x , on pose : $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$.

1. Calculer $f'(x)$, en étudier le signe puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse nulle.

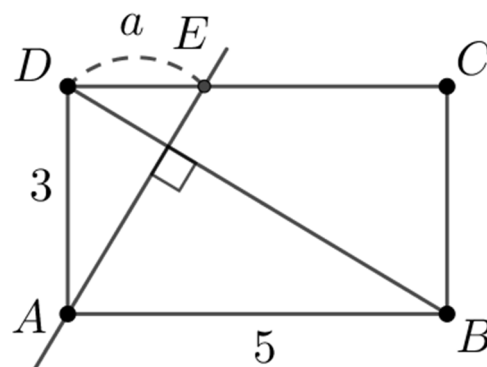
Exercice 4 [3 points]

Une unité de distance étant choisie, on considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 5$ et $AD = 3$.

La perpendiculaire à (BD) passant par A coupe $[CD]$ en E ; on pose $a = DE$.

On munit le plan du repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j})$

avec $\vec{i} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.



1. Donner sans justification les coordonnées de A, B, D, E . En déduire celles de $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BD}$.
2. Déterminer la valeur de a .

Exercice 5 [6 points]

On considère la suite (u_n) telle que : $u_0 = 600$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 0,8u_n + 40$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - 200$.
 - a. Calculer v_0, v_1 et v_2 .
 - b. Montrer que (v_n) est géométrique et préciser sa raison.
 - c. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -80 \times 0,8^n$.
4. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

Exercice 6 [2 points]

Les questions suivantes ont indépendantes.

1. Calculer : $A = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$
2. Exprimer uniquement en fonction de a :

$$B = (a \cos(x) + \sin(x))^2 + (\cos(x) - a \sin(x))^2$$

Exercice 7 [1 point]

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan.

Démontrer que l'on a l'équivalence : $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.

Corrigé

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x} + 4e^x - 5 = 0$.

On a l'équivalence : $e^{2x} + 4e^x - 5 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 + 4e^x - 5 = 0$.

En posant $X = e^x$, cette équation s'écrit :

$$X^2 + 4X - 5 = 0 \Leftrightarrow (X - 1)(X + 5) = 0 \Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = -5$$

Or, $X = e^x$, donc :

$$e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad e^x = -5 \text{ impossible}$$

Conclusion : $S = \{0\}$.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{3x-1} \times e^{-x+5} \leq e^2$.

Rappel : $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R} : e^a \times e^b = e^{a+b}$ et on a l'équivalence : $e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$

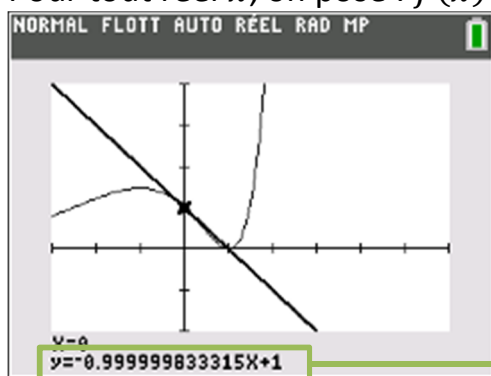
On a les équivalences :

$$\begin{aligned} e^{3x-1} \times e^{-x+5} \leq e^2 &\Leftrightarrow e^{3x-1+(-x+5)} \leq e^2 \Leftrightarrow e^{2x+4} \leq e^2 \Leftrightarrow 2x+4 \leq 2 \\ &\Leftrightarrow 2x+4-4 \leq 2-4 \Leftrightarrow 2x \leq -2 \Leftrightarrow x \leq \frac{-2}{2} \quad (-2 < 0) \Leftrightarrow x \leq -1 \end{aligned}$$

Conclusion : $S =]-\infty; -1]$.

Exercice 3

Pour tout réel x , on pose : $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$.



avec l'approximation de la calculatrice, on obtient : $y = -x + 1$.

1. Calculer $f'(x)$, en étudiant le signe puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$$

Rappel : $(u \times v)' = u' \times v + v' \times u$ et $(e^x)' = e^x$

$$f'(x) = (2x - 2)e^x + e^x(x^2 - 2x + 1)$$

$$f'(x) = e^x(2x - 2 + x^2 - 2x + 1)$$

$$f'(x) = e^x(x^2 - 1)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (x^2 - 1)e^x$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 1$.

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{1} \text{ ou } x = -\sqrt{1} \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Règle : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur de ses racines »

Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de f .

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
sens de variation de f	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$$f(-1) = ((-1)^2 - 2(-1) + 1)e^{-1} = (1 + 2 + 1)e^{-1} = \frac{4}{e}$$

$$f(1) = ((1)^2 - 2(1) + 1)e^1 = 0 \times e = 0$$

2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse nulle.

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x \text{ et } f'(x) = (x^2 - 1)e^x$$

La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a admet pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) ; \text{ pour } a = 0, \text{ on obtient : } y = f'(0)(x - 0) + f(0).$$

$$\text{Or, } f(0) = (0^2 - 2(0) + 1)e^0 = 1 \times 1 = 1, f'(0) = (0^2 - 1)e^0 = -1 \times 1 = -1$$

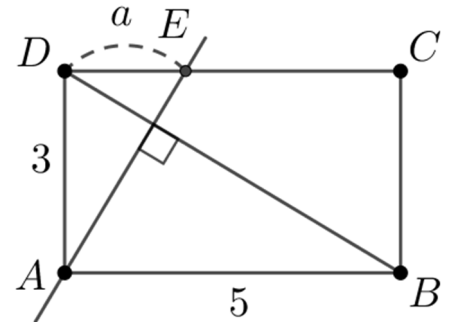
$$\text{On obtient : } y = -1(x - 0) + 1, \text{ c'est-à-dire : } y = -x + 1.$$

Exercice 4

rectangle $ABCD$ tel que $AB = 5$ et $AD = 3$.

la perpendiculaire à (BD) passant par A coupe $[CD]$ en E , $a = DE$

Repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.



1. Coordonnées de A, B, D, E puis de $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BD}$

$$A(0; 0), B(5; 0), D(0; 3) \text{ et } E(a; 3)$$

On a :

$$\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} x_E - x_A \\ y_E - y_A \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} x_D - x_B \\ y_D - y_B \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} a - 0 \\ 3 - 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 0 - 5 \\ 3 - 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} a \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer la valeur de a .

$(AE) \perp (BD)$ donc $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{BD}$ autrement dit : $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. On est dans un repère orthonormé donc on peut utiliser l'expressions du produit scalaire dans un tel repère :

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow x_{\overrightarrow{AE}} \times x_{\overrightarrow{BD}} + y_{\overrightarrow{AE}} \times y_{\overrightarrow{BD}} = 0$$

$$\Leftrightarrow a \times (-5) + 3 \times 3 = 0 \Leftrightarrow -5a + 9 = 0 \Leftrightarrow -5a = -9 \Leftrightarrow 5a = 9 \Leftrightarrow a = \frac{9}{5}$$

$$\text{Conclusion : } a = \frac{9}{5} = 1,8.$$

Exercice 5

On considère la suite (u_n) telle que : $u_0 = 600$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,8u_n + 40$.

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP		NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP	
DEUXIÈME CONDITION SI NÉCESSAIRE		APP SUR + POUR ΔTb1	
Graph1	Graph2	Graph3	
TYPE: SUITE(n)	SUITE(n+1)	SUITE(n+2)	
nMin=0			
$u(n+1) \equiv 0.8u(n) + 40$			
$u(0) \equiv 600$			
$u(1) =$			
$v(n+1) \equiv u(n+1) - 200$			
$v(0) \equiv$			
$v(1) =$			
$w(n+1) =$			

n	u	v		
0	600	400		
1	520	320		
2	456	256		
3	404.8	204.8		
4	363.84	163.84		
5	331.07	131.07		
6	304.86	104.86		
7	283.89	83.886		
8	267.11	67.109		
9	253.69	53.687		
10	242.95	42.95		

1. Calculer u_1 et u_2 .

$$u_1 = 0,8u_0 + 40 = 0,8 \times 600 + 40 = 480 + 40 = 520 \quad u_1 = 520$$

$$u_2 = 0,8u_1 + 40 = 0,8 \times 520 + 40 = 416 + 40 = 456 \quad u_2 = 456$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - 200$.

a. Calculer v_0 , v_2 et v_3 .

$$v_0 = u_0 - 200 = 600 - 200 = 400 \quad v_0 = 400$$

$$v_1 = u_1 - 200 = 520 - 200 = 320 \quad v_1 = 320$$

$$v_2 = u_2 - 200 = 456 - 200 = 256 \quad v_2 = 256$$

b. Montrer que (v_n) est géométrique et préciser sa raison.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 200 = 0,8u_n + 40 - 200 = 0,8u_n - 160 = 0,8u_n - 0,8 \times 200 \\ &= 0,8(u_n - 200) = 0,8v_n \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0,8v_n$ et 0,8 est une constante donc (v_n) est géométrique de raison 0,8.

c. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

Soit $n \in \mathbb{N}$.

(v_n) est géométrique donc : $v_n = v_0 \times q^n$, or $v_0 = 400$ et $q = 0,8$ donc :

$v_n = 400 \times 0,8^n$. On a : $v_n = u_n - 200$ autrement dit : $u_n = v_n + 200$,

or $v_n = 400 \times 0,8^n$ donc : $u_n = 400 \times 0,8^n + 200$.

Conclusion

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 400 \times 0,8^n$ et $u_n = 400 \times 0,8^n + 200$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -80 \times 0,8^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 400 \times 0,8^{n+1} + 200 - (400 \times 0,8^n + 200) \\ &= 400 \times 0,8^{n+1} + 200 - 400 \times 0,8^n - 200 = 400 \times 0,8^n \times 0,8 - 400 \times 0,8^n \times 1 \\ &= 400 \times 0,8^n (0,8 - 1) = 400 \times 0,8^n \times (-0,2) = -80 \times 0,8^n \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -80 \times 0,8^n$.

4. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$0,8 > 0$ donc $0,8^n > 0$, comme $-80 < 0$, on en déduit : $-80 \times 0,8^n < 0$ autrement dit : $u_{n+1} - u_n < 0$.

Conclusion :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est (strictement) décroissante.

Exercice 6

1. Calculer : $A = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$

Rappel $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$

On a :

$$\begin{aligned} &\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{7}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

2. Exprimer $\mathbf{B}$ uniquement en fonction de a .

$$\begin{aligned}
&(a \cos(x) + \sin(x))^2 + (\cos(x) - a \sin(x))^2 \\
&= a^2 \cos^2(x) + 2a \cos(x) \sin(x) + \sin^2(x) + \cos^2(x) - 2a \cos(x) \sin(x) + a^2 \sin^2(x) \\
&= (a^2 + 1) \cos^2(x) + (1 + a^2) \sin^2(x) = (a^2 + 1) \cos^2(x) + (a^2 + 1) \sin^2(x) \\
&= (a^2 + 1)(\cos^2(x) + \sin^2(x)) = (a^2 + 1) \times 1 = a^2 + 1
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbf{B} = a^2 + 1$.

Exercice 7

Démontrer que l'on a l'équivalence : $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.

On a les équivalences :

$$\begin{aligned}
\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| &\Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2 \\
&\Leftrightarrow \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \Leftrightarrow 2\vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \Leftrightarrow 4\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\
&\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}
\end{aligned}$$

Conclusion :

On a donc bien l'équivalence : $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.